第 5 講　複素数平面

PART1 複素数平面

要点整理と公式

要点 ① 複素数と複素数平面

「複素数」… a，b を実数，i を虚数単位として $a+bi$ の形で表される数。

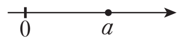
a を実部，b を虚部という。

$b=0$ のとき $a+0i$ すなわち a は実数を表す。

$b\neq 0$ のとき $a+bi$ を虚数という。

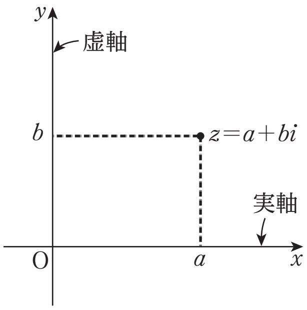
特に $a=0$，$b\neq 0$ のとき $0+bi$ すなわち bi を純虚数という。

数直線上では，1 つの点に 1 つの実数が対応している。ここでは，複素数を座標平面上の点に対応させることを考える。



座標平面上で，複素数 $z=a+bi$ に対して点 $(a,\ b)$ を対応させる。これにより，複素数と座標平面上の点は，1 対 1 に対応する。

複素数 $z=a+bi$ を座標平面上 $(a,\ b)$ に対応させるとき，この座標平面を「　　　　　」(複素平面，ガウス平面) という。



複素数平面上では，x 軸を「　　」，y 軸を「　　」という。実軸上の点は実数を表し，原点 O は実数 0 を表す。また，原点 O を除く虚軸上の点は純虚数を表す。

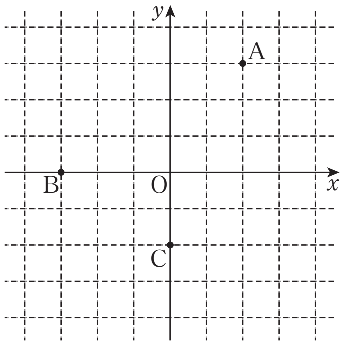
複素数平面上では，複素数 z に対応する点 P を　　，または単に点　 と表す。

(ex) 右図において

点 A は A(　　) と表す。また，点　　　と表す。

点 B は B(　　) と表す。また，点　　と表す。

点 C は C(　　) と表す。また，点　　と表す。



要点 ② 複素数の実数倍

複素数 $z=a+bi$ は0でないとする。このとき，kz(k は実数)が表す点について考える。

$$kz=ka+(kb)i$$

であるから，A(z)，B(kz) とすると，3点O，A，Bは一直線上にあり，

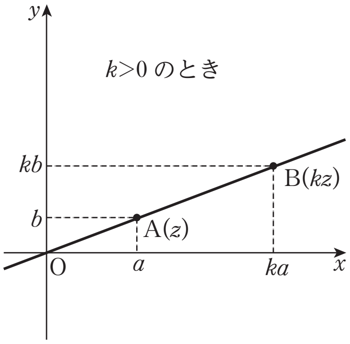
$k>0$ のとき　原点Oに関してBはAと同じ側

$k<0$ のとき　原点Oに関してBはAと反対側

にある。また，$k=0$ のとき，BはOと一致する。

また，$\mathrm{OB}=|k|\mathrm{OA}$ である。

直線OA上の任意の点は，kz の形の複素数を表す。



以上のことより，$\alpha \neq 0$ のとき，次のことが成り立つ。

> 3点0，α，β が一直線上にある $\iff$ $\beta=k\alpha$ を満たす実数 k が存在する

要点 ③ 複素数の加法・減法

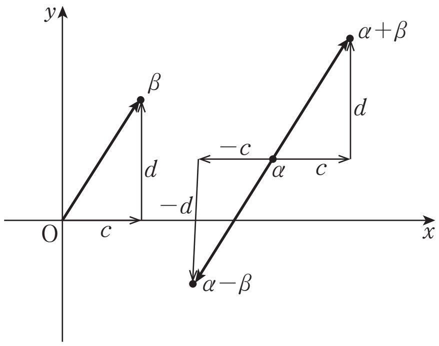
2つの複素数 $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ の和，差を複素数平面上で考える。

$$\alpha+\beta=(a+bi)+(c+di)$$
$$=(a+c)+(b+d)i$$

したがって，点 $\alpha+\beta$ は，点 α を実軸方向に c，虚軸方向に d だけ平行移動した点である。

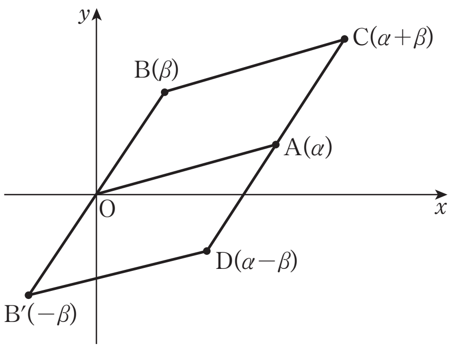
$$\alpha-\beta=(a+bi)-(c+di)$$
$$=(a-c)+(b-d)i$$

したがって，点 $\alpha-\beta$ は，点 α を実軸方向に $-c$，虚軸方向に $-d$ だけ平行移動した点である。



3点 O(0)，A(α)，B(β) が一直線上にないとき，点 C($\alpha+\beta$) は，2辺OA，OBでつくられる平行四辺形の第4の頂点である。

また，B′($-\beta$) とすると，点 D($\alpha-\beta$) は，2辺OA，OB′ でつくられる平行四辺形の第4の頂点である。



1 (1) $\alpha=3-i$，$\beta=x+3i$ とする。3 点 0，α，β が一直線上にあるとき，実数 x の値を求めよ。

(2) $\alpha=2+3i$，$\beta=-2+i$ であるとき，次の複素数を表す点を図示せよ。

(i) $\alpha+\beta$　　(ii) $\alpha-\beta$　　(iii) $\alpha+2\beta$

Point Pickup

複素数の実数倍

$\alpha \neq 0$ のとき

3 点 0，α，β が一直線上にある $\iff$ $\beta=k\alpha$ (k は実数)

複素数の加法・減法

3 点 O(0)，A(α)，B(β) が一直線上にないとき

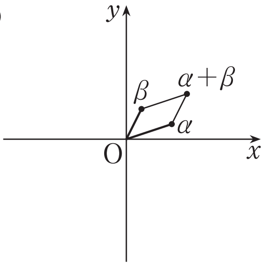
・点 C($\alpha+\beta$) は，2 辺 OA，OB でつくられる平行四辺形の第 4 の頂点

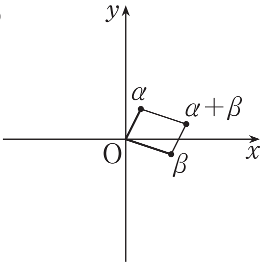
・B′($-\beta$) とすると，点 D($\alpha-\beta$) は，2 辺 OA，OB′ でつくられる平行四辺形の第 4 の頂点

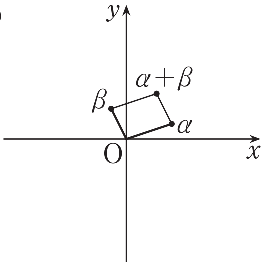
第 5 講 PART1 確認問題

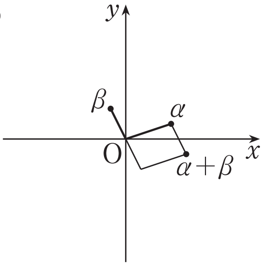
1 $\alpha=2+3i$，$\beta=x-6i$ とする。3 点 0，α，β が一直線上にあるとき，$x=$ [アイ] である。

2 $\alpha=3+i$，$\beta=-1+2i$ とする。$\alpha+\beta$ を表す点を，下の①～④のうちから選べ。[ウ]

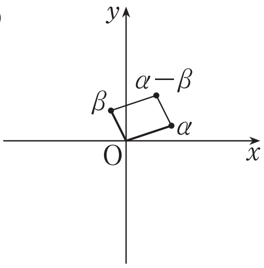
①


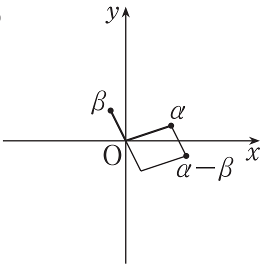
②


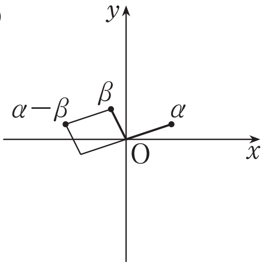
③


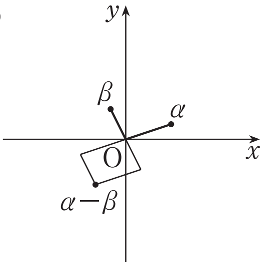
④


3 $\alpha=3+i$，$\beta=-1+2i$ とする。$\alpha-\beta$ を表す点を，下の①～④のうちから選べ。 **エ**

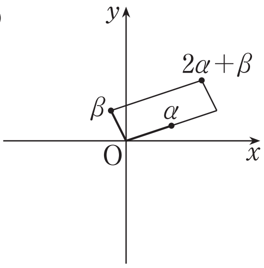
①


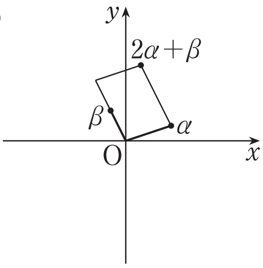
②


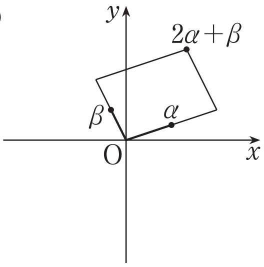
③


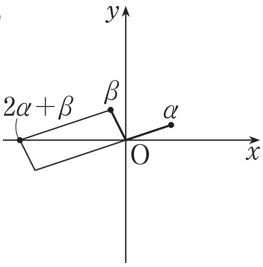
④


4 $\alpha=3+i$，$\beta=-1+2i$ とする。$2\alpha+\beta$ を表す点を，下の①～④のうちから選べ。 **オ**

①


②


③


④


[MEMO]

第 5 講　複素数平面

PART1 複素数平面

1　(1)　$\alpha=3-i$，$\beta=x+3i$ とする。3 点 0，α，β が一直線上にあるとき，実数 x の値を求めよ。

(2)　$\alpha=2+3i$，$\beta=-2+i$ であるとき，次の複素数を表す点を図示せよ。

(i)　$\alpha+\beta$　　(ii)　$\alpha-\beta$　　(iii)　$\alpha+2\beta$

[解答]

(1)　3 点 0，α，β が一直線上にあるとき，$\beta=k\alpha$ となる実数 k が存在する。

$x+3i=k(3-i)$ より　$x+3i=3k-ki$

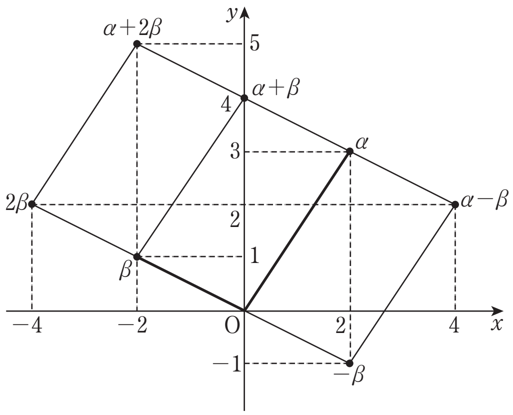
よって　$x=3k$，$3=-k$

したがって　$k=-3$，$x=-9$

(2)(i)　$\alpha+\beta=(2+3i)+(-2+i)=4i$

(ii)　$\alpha-\beta=(2+3i)-(-2+i)=4+2i$

(iii)　$\alpha+2\beta=(2+3i)+2(-2+i)=-2+5i$



第 5 講 PART1 確認問題 解答

1 **[正解]**アイ：-4

[解説]

3 点 0，α，β が一直線上にあるとき，$\beta=k\alpha$ となる実数 k が存在する。[A]

$$x-6i=k(2+3i)$$

より，

$$x-6i=2k+3ki$$

よって，

$$\begin{cases} x=2k & \cdots\cdots① \\ -6=3k & \cdots\cdots② \end{cases}$$ [B]

②より，$k=-2$

①より，$\boldsymbol{x=-4}$

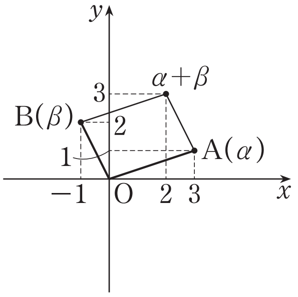
[A] 3 点 0，α，β が一直線上にある $\Longleftrightarrow$ $\beta=k\alpha$ を満たす実数 k が存在する

[B] 両辺の実部，虚部がそれぞれ等しい。

2 **[正解]**ウ：③

[解説]

$$\alpha+\beta=(3+i)+(-1+2i)$$
$$=2+3i$$



[C]

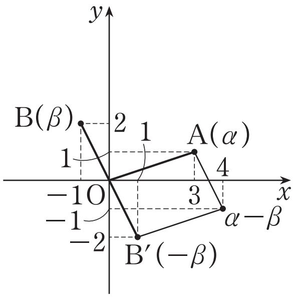
[C] 3 点 O(0)，A(α)，B(β) が一直線上にないとき，$\alpha+\beta$ を表す点は，2 辺 OA，OB でつくられる平行四辺形の第 4 の頂点である。

3

[正解] エ：②

[解説]

$$\alpha-\beta=(3+i)-(-1+2i)$$
$$=4-i$$



[D]

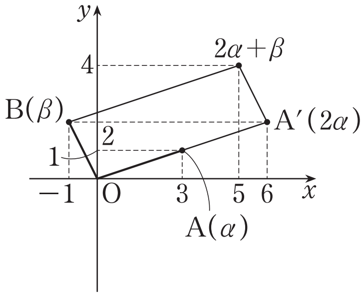
[D]　3点 $O(0)$，$A(\alpha)$，$B(\beta)$ が一直線上にないとき，
点 $B'(-\beta)$ とすると，$\alpha-\beta$ を表す点は，2辺 OA，OB′ でつくられる平行四辺形の第4の頂点である。

4

[正解] オ：①

[解説]

$$2\alpha+\beta=2(3+i)+(-1+2i)$$
$$=5+4i$$



[E]

[E]　3点 $O(0)$，$A(\alpha)$，$B(\beta)$ が一直線上にないとき，
点 $A'(2\alpha)$ とすると，$2\alpha+\beta$ を表す点は，2辺 OA′，OB でつくられる平行四辺形の第4の頂点である。